

Entropie et deuxième principe

2.4 Se frotter les mains

☆☆☆☆ Se frotter les mains est un processus dissipatif qu'on désire modéliser et quantifier. On considère les mains comme des solides indéformables et on suppose qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre les mains et l'environnement.

- 1) Déterminer la puissance extérieure P^{ext} dissipée par le frottement durant ce processus en termes de la force de frottement \mathbf{F}^{fr} et de la vitesse \mathbf{v} , supposée constante, d'une main par rapport à l'autre.
- 2) À température ambiante T , déterminer la source d'entropie Σ_S de ce processus.

Application numérique

$\|\mathbf{F}^{\text{fr}}\| = 1 \text{ N}$, $\|\mathbf{v}\| = 0.1 \text{ m/s}$ et $T = 25^\circ\text{C}$

2.4 Solution

- 1) Par rapport au référentiel du centre de masse des mains, chaque main se déplace avec une vitesse de norme constante $\|\mathbf{v}/2\|$. Il y a deux types de forces agissant sur le système formé des deux mains : des forces extérieures d'entraînement de norme $\|\mathbf{F}^{\text{ext}}\|$ et des forces intérieures de frottement de norme $\|\mathbf{F}^{\text{fr}}\|$ exercées sur chaque main. La puissance extérieure P^{ext} exercée sur le système des deux mains, qui est due uniquement aux forces extérieures d'entraînement exercées sur chaque main, s'écrit,

$$P^{\text{ext}} = (\mathbf{F}^{\text{ext}}) \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right) + (-\mathbf{F}^{\text{ext}}) \cdot \left(-\frac{\mathbf{v}}{2}\right) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}$$

D'après la deuxième loi de Newton (1.21) appliquée à chaque main qui se déplace à vitesse constante, et donc à quantité de mouvement constante par rapport au référentiel du centre de masse des mains, les forces extérieures sont égales et opposées aux forces de frottement,

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{fr}} = \mathbf{0}$$

Compte tenu de cette relation, la puissance extérieure P^{ext} s'écrit en termes de forces de frottement comme,

$$P^{\text{ext}} = -\mathbf{F}^{\text{fr}} \cdot \mathbf{v} = 0.1 \text{ W}$$

car $\mathbf{F}^{\text{fr}} \cdot \mathbf{v} < 0$ étant donné que la force de frottement s'oppose au mouvement.

- 2) Comme on considère les mains comme des solides indéformables, il ne peut pas y avoir de déformation des mains par l'environnement, ce qui signifie que la puissance mécanique de déformation du système est nulle, c'est-à-dire que $P_W = 0$. De plus, comme on suppose qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre les mains et l'environnement, le courant de chaleur est nul, c'est-à-dire que $I_Q = 0$. Ainsi, le premier principe (1.18) se réduit à,

$$\dot{E} = P^{\text{ext}}$$

Comme le mouvement des mains se fait avec une vitesse de norme constante $\|\mathbf{v}/2\|$ par rapport au référentiel du centre de masse des mains, l'énergie cinétique du système est constante. Par conséquent, étant donné que l'énergie E est la somme de l'énergie cinétique constante et de l'énergie interne U , les dérivées temporelles de ces deux énergies sont égales,

$$\dot{E} = \dot{U}$$

Comme les mains sont considérées comme des solides indéformables, le volume du système est constant, c'est-à-dire que $\dot{V} = 0$. Par conséquent, l'équation d'évolution (2.19) de l'énergie interne se réduit à,

$$\dot{U} = T \dot{S}$$

De plus, le courant de chaleur est nul, c'est-à-dire que $I_Q = 0$. Ainsi, l'équation d'évolution de l'entropie (2.29) se réduit à,

$$\dot{S} = \Sigma_S$$

Finalement, la source d'entropie s'écrit en termes de la force de frottement comme,

$$\Sigma_S = \dot{S} = \frac{\dot{U}}{T} = \frac{\dot{E}}{T} = \frac{P^{\text{ext}}}{T} = -\frac{\mathbf{F}^{\text{fr}} \cdot \mathbf{v}}{T} = 3.36 \cdot 10^{-4} \text{ W/K}$$

Le système constitué des deux mains n'est pas un système simple. En effet, les vitesses des deux mains sont différentes, car elles ont un mouvement relatif l'une par rapport à l'autre. Par conséquent, on doit attribuer une fonction d'état vitesse et une variable entropie spécifique à chaque main. En particulier, la relation (1.43) n'est pas applicable parce que le centre de masse des deux mains est immobile bien que la puissance extérieure P^{ext} soit clairement non nulle.

2.6 Échauffement par brassage

☆☆☆ Dans une expérience analogue à celle de Joule, on utilise un moteur électrique au lieu d'un poids de masse M pour brasser un liquide incompressible homogène (fig. 2.1). On considère que la puissance extérieure P^{ext} due au moteur est connue, que la vitesse angulaire ω des pales du brasseur, de moment d'inertie I , est constante et que le liquide reste immobile. De plus, on suppose que l'énergie interne U est une fonction de la température T telle que $U = M c_M T$, où le coefficient c_M , qui représente la capacité thermique par unité de masse, est connu et indépendant de la température.

- 1) Dédire l'accroissement de température $\Delta T_{i \rightarrow f}$ dû au brassage de l'état initial i au temps $t = 0$ à l'état final au temps t .
- 2) Déterminer l'expression de la variation d'entropie $\Delta S_{i \rightarrow f}$ durant ce processus dont la température initiale est T_0 .

Application numérique

$M = 200 \text{ g}$, $P^{\text{ext}} = 19 \text{ W}$, $c_M = 3 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$, $t = 120 \text{ s}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$.

2.6 Solution

- 1) Le système constitué du brasseur et du liquide n'est pas un système simple puisque le liquide est immobile et que le brasseur est en rotation. Étant donné qu'il n'y a pas de variation de volume, pas transfert de chaleur ou de matière avec l'environnement lors du brassage, la puissance mécanique, le courant de chaleur et le courant énergétique de matière sont nuls,

$$P_W = I_Q = I_C = 0$$

L'énergie totale du système (1.36) est la somme de l'énergie cinétique de rotation des pales du brasseur et de l'énergie interne du liquide,

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + U$$

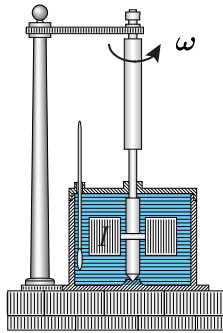


Fig. 2.1 Un brasseur avec des pales de moment d'inertie I plongées dans un liquide visqueux est entraîné par un moteur électrique à vitesse angulaire constante ω .

où I est le moment d'inertie des pales du brasseur par rapport à l'axe de rotation. Étant donné que la vitesse angulaire ω est constante, l'énergie cinétique de rotation des pales est également constante. Par conséquent, en se plaçant dans le référentiel où le liquide homogène est au repos, le premier principe (1.71) se réduit à,

$$\dot{E} = \dot{U} = P^{\text{ext}}$$

En intégrant l'équation d'évolution de l'énergie interne durant l'intervalle de temps t qui suit le temps initial $t = 0$, on obtient la variation d'énergie interne,

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = \int_{U_i}^{U_f} dU = \int_0^t \dot{U} dt' = \int_0^t P^{\text{ext}} dt' = P^{\text{ext}} \int_0^t dt' = P^{\text{ext}} t$$

L'augmentation d'énergie interne $\Delta U_{i \rightarrow f}$ pour une augmentation de température $\Delta T_{i \rightarrow f}$ du liquide s'écrit,

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = M c_M \Delta T_{i \rightarrow f}$$

Ainsi, en comparant ces deux équations, on obtient l'expression suivante pour l'augmentation de température,

$$\Delta T_{i \rightarrow f} = \frac{P^{\text{ext}} t}{M c_M} = 3.8 \text{ K}$$

2) Le premier principe (2.39) s'écrit,

$$\dot{U} = T \dot{S} = P^{\text{ext}} \quad \text{ainsi} \quad \dot{S} = \frac{P^{\text{ext}}}{T}$$

Étant donné que T_0 est la température au temps initial $t = 0$, la variation de température s'écrit,

$$\Delta T_{i \rightarrow f} = T - T_0$$

Par conséquent, le résultat obtenu au point précédent est mis sous la forme suivante,

$$T = T_0 + \frac{P^{\text{ext}}}{M c_M} t$$

Ainsi, la différentielle de l'entropie s'écrit,

$$dS = \dot{S} dt = \frac{P^{\text{ext}}}{T} dt = \frac{P^{\text{ext}} dt}{T_0 + \frac{P^{\text{ext}}}{M c_M} t} = M c_M \left(\frac{\frac{P^{\text{ext}}}{M c_M T_0} dt}{1 + \frac{P^{\text{ext}}}{M c_M T_0} t} \right)$$

L'accroissement d'entropie durant le processus de brassage est obtenu en

intégrant cette équation par rapport au temps,

$$\begin{aligned}\Delta S_{i \rightarrow f} &= \int_{S_i}^{S_f} dS = \int_{S(0)}^{S(t)} dS = \int_0^t M c_M \left(\frac{\frac{P^{\text{ext}}}{M c_M T_0} dt'}{1 + \frac{P^{\text{ext}}}{M c_M T_0} t'} \right) \\ &= M c_M \ln \left(1 + \frac{P^{\text{ext}} t}{M c_M T_0} \right) = 7.55 \text{ J K}^{-1}\end{aligned}$$

2.8 Processus adiabatique réversible sur un gaz

☆☆☆☆ Un gaz parfait à pression p et volume V est tel que son énergie interne est donnée par $U = c p V$, où c est une constante sans dimension. Déterminer la pression $p(V)$ pour une compression ou une expansion adiabatique réversible.

2.8 Solution

Comme le processus est adiabatique et réversible, il n'a pas de variation d'entropie. On peut donc utiliser le volume V comme unique variable d'état. Ainsi, l'énergie interne s'écrit $U(V) = c p(V) V$. La dérivée de l'énergie interne par rapport au volume est donnée par,

$$\frac{dU}{dV} = \frac{d}{dV} (c p V) = c \frac{dp}{dV} V + c p = -p$$

qui peut être remis en forme comme,

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

où $\gamma = (c + 1)/c$. L'intégration de cette expression de l'état initial (p_i, V_i) à l'état final (p_f, V_f) est écrite comme,

$$\int_{p_i}^{p_f} \frac{dp}{p} + \gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = 0$$

ce qui donne,

$$\ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right) + \gamma \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0 \quad \text{ainsi} \quad \ln \left(\frac{p_f V_f^\gamma}{p_i V_i^\gamma} \right) = 0$$

Par conséquent, les variables initiales et finales sont liées par,

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$$

ce qui donne l'identité,

$$p V^\gamma = \text{cste}$$

2.10 Compression thermique d'un ressort

☆☆☆☆ On considère un piston de masse négligeable coulissant sans frottement dans un cylindre de section d'aire A , attaché à un ressort dont la constante de rappel est k (fig. 2.2). Lorsque le cylindre est vide, le piston se trouve en position x_0 . On le remplit d'un gaz parfait qui satisfait l'équation d'état $pV = NRT$. L'énergie interne du gaz est donnée par $U = cNRT$ où $c > 0$ est une constante et $R > 0$ également. Après remplissage, il se trouve alors à l'équilibre en position initiale x_i . On chauffe le cylindre qui se trouve alors à l'équilibre en position finale x_f . On suppose que ce processus est réversible et que le système se trouve dans une enceinte à vide, c'est-à-dire que la pression dans l'enceinte est nulle. La masse du piston n'est pas prise en considération ici.

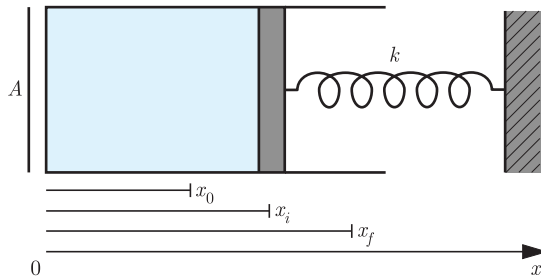


Fig. 2.2 Un piston enfermant un gaz passe de la position x_i à la position x_f , lorsque le gaz contenu dans le cylindre est chauffé. Le piston est retenu par un ressort de constante élastique k . La position au repos du ressort est en x_0 .

- 1) Déterminer les volumes initial V_i et final V_f , la pression initiale p_i et finale p_f , et les températures initiale T_i et finale T_f du gaz en termes des paramètres k , A , x_0 , x_i et x_f .
- 2) Montrer que la dérivée de la pression p par rapport au volume V est de la forme,

$$\frac{dp}{dV} = \frac{k}{A^2}$$

- 3) Déterminer le travail $-W_{i \rightarrow f}$ effectué par le gaz sur le ressort lorsque le piston se déplace de x_i à x_f en termes des paramètres k , x_i et x_f .
- 4) Déterminer la variation d'énergie interne $\Delta U_{i \rightarrow f}$ du gaz lorsque le piston se déplace de x_i à x_f en termes des paramètres k , c , x_0 , x_i et x_f .
- 5) Déterminer la chaleur $Q_{i \rightarrow f}$ fournie au gaz lorsque le piston se déplace de x_i à x_f en termes des paramètres k , c , x_0 , x_i et x_f .

2.10 Solution

- 1) Dans les états d'équilibre initial i et final f , les volumes initial et final du gaz parfait sont,

$$V_i = A x_i \quad \text{et} \quad V_f = A x_f$$

et les pressions initiale et finale du gaz parfait valent,

$$p_i = \frac{F_i}{A} = \frac{k}{A} (x_i - x_0) \quad \text{et} \quad p_f = \frac{F_f}{A} = \frac{k}{A} (x_f - x_0)$$

où F_i et F_f sont les normes initiale et finale de la force élastique agissant sur le ressort. Vu que le processus est réversible, la pression du gaz parfait est égale à la pression exercée par le ressort. Les températures initiale et finale du gaz parfait sont,

$$T_i = \frac{p_i V_i}{NR} = \frac{k}{NR} (x_i - x_0) x_i \quad \text{et} \quad T_f = \frac{p_f V_f}{NR} = \frac{k}{NR} (x_f - x_0) x_f$$

- 2) La variation infinitésimale de pression du gaz dp peut être exprimée en termes de la variation de volume infinitésimal dV grâce à la variation infinitésimale de la norme de la force élastique $dF = k dx$,

$$dp = \frac{1}{A} dF = \frac{k}{A} dx = \frac{k}{A^2} dV$$

Ainsi,

$$\frac{dp}{dV} = \frac{k}{A^2} = \text{cste}$$

- 3) Par conséquent, la pression p est une fonction linéaire du volume V ,

$$p = \frac{k}{A^2} (V - V_0)$$

Le travail $-W_{i \rightarrow f}$ effectué par le gaz parfait sur le ressort est donné en termes de V_i et V_f par,

$$\begin{aligned} -W_{i \rightarrow f} &= \int_{V_i}^{V_f} p dV = \frac{k}{A^2} \int_{V_i}^{V_f} (V - V_0) dV \\ &= \frac{k}{2A^2} (V_f^2 - V_i^2) - \frac{k}{A^2} V_0 (V_f - V_i) \end{aligned}$$

On peut réécrire ce résultat en termes de x comme,

$$\begin{aligned} -W_{i \rightarrow f} &= \frac{k}{2} (x_f^2 - x_i^2) - k x_0 (x_f - x_i) \\ &= \frac{k}{2} \left((x_f - x_0)^2 - (x_i - x_0)^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

Le travail effectué par le gaz parfait sur le ressort est égal à la variation d'énergie élastique du ressort lors de sa compression, ce qui signifie qu'il est entièrement utilisé pour comprimer le ressort. Ceci est une conséquence du fait que la dilatation du gaz parfait est un processus réversible.

- 4) La variation d'énergie interne $\Delta U_{i \rightarrow f}$ est donnée par,

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = c NR (T_f - T_i) = c k \left((x_f - x_0) x_f - (x_i - x_0) x_i \right) > 0$$

5) Compte tenu du premier principe (1.65), la chaleur fournie au gaz s'écrit,

$$Q_{i \rightarrow f} = \Delta U_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = c k \left((x_f - x_0) x_f - (x_i - x_0) x_i \right) \\ + \frac{k}{2} \left((x_f - x_0)^2 - (x_i - x_0)^2 \right) > 0$$